



Целые точки в плоских областях

**Исломова Нигора
Хамзаевна**

*Термезский государственный университет
Математика
Магистр +998936358130*

**Рахмонов Зарулло
Хусенович**

*Доктор физико-математических наук,
профессор Таджикского национального
университета, академик Академии наук Республики
Таджикистана*

Аннотация: рассматриваем первые задачи теории целых точек, именно «проблема Гаусса о числе целых точек в круге» и «проблема делителей Дирихле». Теория чисел занимается изучением свойств целых чисел. Аналитическая теория чисел - часть теории чисел, в которой наряду с собственными методами существенно используется аналитический аппарат математики. Задачи о количестве целых точек в областях, ограниченных кривыми, восходят к работам К.Ф.Гаусса и Л.Дирихле. Интерес к таким задачам связан с тем, что они возникают при определении средних значений некоторых арифметических функций .

Ключевые слово: целые точки , проблема Гаусса, теорема Дерихле.

Введение: К.Гаусс и Л.Дерихле первыми стали рассматривать вопросы о количестве точек с целочисленными координатами в областях на плоскости . Гаусс доказал, что число таких точек в круге $x^2+y^2 \leq R^2$ равно сумме площади этого круга πR^2 и величины, которая при увеличении R растёт не быстрее первой степени R , а Дирихле доказал, что число таких точек с положительными координатами под гиперболой $xy=N$ равно сумме $N(\ln N + 2C - 1)$, где C постоянная Эйлера, и величины, которая при увеличении N растёт не быстрее N . Обобщения этих утверждений, а также нахождение наилучших возможных остатков в этих суммах (проблема Гаусса целых точек в круге и проблема делителей Дирихле) послужили источником большой главы теории чисел.

Определение целых точек. Точка M с координатами (x, y) называется целой, если x и y – целые числа

Рассмотрим круг: $x^2 + y^2 \leq R^2$. Число целых точек в этом круге обозначим через $K(R)$. При больших R величина $K(R)$ стремится к πR^2 (площадь круга). Через ΔR обозначим разность между $K(R)$ и πR^2 , т.е. $\Delta R = K(R) - \pi R^2$.

Проблема Гаусса. Проблема Гаусса о числе целых точек в круге состоит в том, чтобы для величины $|\Delta R|$ получить возможно более точную оценку сверху при $R \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Для $K(R)$ — числа целых точек в круге справедлива следующая асимптотическая формула

$$K(R) = \pi R^2 + \Delta(R) + O(1), \quad \Delta(R) = 8 \sum_{0 < x \leq \frac{R}{\sqrt{2}}} \rho(\sqrt{R^2 - x^2}),$$

Теорема Дерихле. Пусть α и $\tau \geq 1$ — действительные числа; существует несократимая дробь $\frac{a}{b}$, для которой $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b\tau}$, $0 < b \leq \tau$ (или: существует такая пара взаимно простых целых чисел a и b , что $|b\alpha - a| < \frac{1}{\tau}$, $0 < b \leq \tau$).

Самим Гауссом, а затем и другими математиками были предложены различные асимптотические оценки, например, в работах Вороного Г.Ф., Ландау Э.Г., Хаксли М.Н., Харди Г.Х. и Литтлвуда Дж.И. А проблема определения целых точек в шаре решалась, например, в работах Виноградова И.М., Чамизо Ф. и Иванеца Г.

Использование литературы:

1. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
2. Хуа Ло-кен. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1984.
3. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1981.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел // Москва: Наука, 1983,